Comentarios a las soluciones de los ejercicios

Ejercicio 1

[1] Algunos necesitáis casi un folio para justificar esta evidencia. Esta parte del ejercicio es casi trivial: lo único que hay que hacer es aplicar la regla de la cadena a las funciones $z \mapsto 1 \pm z$ y a la función $z \mapsto \log z$. Sorpresas: hay quien no entiende ¡todavía! la regla de la cadena. También hay quien considera funciones holomorfas en un conjunto que no es abierto. Todavía peor: muchos aplicáis el teorema de extensión de Riemann para justificar que f es derivable en ± 1.

[2] La igualdad, para $|z| < 1$, $\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$, puede darse por sabida: se estudia en Análisis I y este curso la hemos usado varias veces (v. ejercicio 9 de la relación 8). Si no quiere darse por sabida puede justificarse en una línea.

Esta parte del ejercicio puede hacerse de muchas formas. La que doy me parece la más directa, pero también puede procederse como sigue: la función definida para $|z| < 1$ por $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{n(2n+1)}$, es holomorfa en $D(0,1)$ y

$$g''(z) = \sum_{n=1}^{\infty} 2z^{2n-1} = 2z \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} = \frac{2z}{1-z^2}.$$

Se deriva f para comprobar que $f''(z) = g''(z)$ para todo $z \in D(0,1)$, y deducir que f' y g' se diferencian en una constante en $D(0,1)$, y como $g'(0) = f'(0) = 0$, obtenemos que f' y g' coinciden en $D(0,1)$ lo que, a su vez, implica que f y g coinciden en $D(0,1)$ por tener ambas la misma derivada en $D(0,1)$ y coincidir en $z = 0$.

Sorpresas: hay quien calcula el radio de convergencia de la serie aplicando directamente el criterio del cociente, sin reparar en que la serie tiene nulos los coeficientes de las potencias pares de z. Hay muchos errores porque no prestaís atención a cuál debe ser el primer término de una serie, es decir, desde qué valor de n hay que empezar a sumar. Eso no importa si estamos estudiando la convergencia, pero es muy importante si estamos interesados en la suma de la serie. A pesar de mi insistencia, hay quien dice que la suma de los logaritmos principales de dos números complejos es el logaritmo principal del producto (en este caso resulta que es verdad cuando $|z| < 1$, pero eso requiere siempre justificación). En general, hay muchos errores de cálculo.

También llama la atención que muchos de vosotros uséis una notación inapropiada para indicar la suma de una serie: eso indica que no tenéis claro el concepto de serie. Me explico: la notación $\sum_{n\geq 1} z_n$ representa una *sucesión*, a saber, la sucesión $\left\{ \sum_{k=1}^{n} z_k \right\}_{n\in IN}$; mientras que, cuando dicha sucesión es convergente, su límite se representa por $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, es decir: $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{n\geq 1} z_n = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n} z_k \right\}_{n\in IN}$. Aunque eso debiera ser bien sabido, muchos usáis la notación $\sum_{n\geq 1} z_n$ para representar la suma de la serie. ¿Alguno de vosotros escribiría $0 = \{\frac{1}{n}\}$?, ¿verdad que no?: porque tenéis claro el concepto de sucesión y sabéis distinguir entre una sucesión y su eventual límite. Pues lo mismo con las series: no debe escribirse $\frac{1}{1-z} = \sum_{n\geq 0} z^n$

sino $\dfrac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ indicando siempre para qué valores de z es válida dicha igualdad. Quizás lo que ocurre es que no acabáis de convenceros de que las series no son sino sucesiones. En fin.

[3] Este razonamiento no lo ha hecho nadie bien, a pesar de la información que se dio al empezar el examen. Casi nadie se molesta en estudiar la continuidad de f en ± 1. ¿No sospecháis, a estas alturas, que si os dan un dato es porque hay que usarlo? El límite $\lim_{z\to 1} f(z)$ no está justificado hacerlo usando la regla de L'Hôpital.

Hay otras formas de hacer esta parte del ejercicio. Por ejemplo: usando los ejercicios 2 y 4 de la relación 7.

[4] Es lamentable que muchos no sepáis que $i^{2n+1} = i(-1)^n$. Lo hice notar en clase hace muy poco. Esta última parte del ejercicio no la hace casi nadie. No puedo comprender por qué. ¿Acaso no sabéis calcular el logaritmo principal de $1 \pm i$?

He calificado el ejercicio dando 2-3-3-2 puntos a cada parte respectiva.

Ejercicio 2

Este ejercicio se hizo en clase con una pequeña variante que consistió en sustituir el disco unidad por el cuadrado unidad.

[1] Casi todos os equivocáis al hacer esta bobadita. Hay quien cree que los puntos de la forma e^{it}, $0 \le t \le \pi/2$, son todo un *sector* del disco unidad. Sin comentarios.

[2] ¡No puede usarse el principio de identidad para probar que g es nula! ¿Cuántas veces se ha insistido en que, para aplicar el principio de identidad, los ceros de la función tienen que acumularse en un punto, al menos, *del dominio*? ¡No en la frontera del dominio!.

[3] Con una sola execpción, todos dais como evidente que, al ser g nula, también tiene que serlo f. Pues no. No es evidente. Se trata de una propiedad que tienen las funciones holomorfas: si el producto de dos de ellas se anula en todos los puntos de un dominio es porque una de ellas es idénticamente cero. Es fácil dar ejemplos de funciones (incluso de clase C^∞) en $\mathbb{R}$ (o en $\mathbb{R}^k$), no nulas, cuyo producto es nulo. Es llamativo que deis por evidente que f es cero en $D(0,1)$ por serlo g; ¿no acabáis de probar que g es cero en $C(0,1)^*$ sin necesidad para ello de que f tenga que ser cero en toda la circunferencia unidad?.

La primera parte (probar que g es cero) vale 4 puntos, y la otra parte (probar que f es cero) vale 6 puntos.

Ejercicio 3

Se trata del ejercicio 45 de la relación 10. Habíais sido informados de que en el examen iba a ponerse uno de los ejercicios de las relaciones. De poco os ha servido.

[1] Algunos afirmáis que este límite puede ser un numero complejo.

[2] Es importante invocar aquí al teorema de Taylor.

[3] Es casi imprescindible usar las desigualdades de Cauchy para probar que f es un polinomio. ¡Se necesita menos de dos líneas! No entiendo que se diga que es consecuencia evidente de la desigualdad $M(r) < r^\beta$.

[4] Es lógico comparar f con su término de mayor grado, pues lo que queremos es controlar $|f(z)|$ cuando $|z|$ es grande.

[5] No estoy seguro de que comprendáis la definición de límite. Es frecuente que, a pesar de mi insistencia, en esta parte del ejercicio escribáis desigualdades entre números complejos. Sin comentarios.

Un disparate frecuente consiste en asegurar que si $\lim_{r\to+\infty} M(r) = +\infty$ entonces también $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$. Contraejemplo: si f es la función exponencial, entonces $M(r) = e^r$ pero, dicha función no tiene límite en infinito (lo comentábamos hace poco en clase). Lo llamativo es que caigáis en este error y, a continuación, uséis el hecho de que si una función entera tiene límite infinito en infinito entonces dicha función es polinómica. ¡Estáis afirmando, sin daros cuenta, que toda función entera es polinómica! Téngase en cuenta que, lo que dice el teorema de Liouville es que, si f es entera no constante, entonces $\lim_{r\to+\infty} M(r) = +\infty$ (esto se ha visto también en el ejercicio 30 de la relación 10), pero eso está muy lejos de implicar que $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$.

Cada una de las dos partes del ejercicio vale 5 puntos.

Ejercicio 4 Este ejercicio tiene dos partes. Una inmediata y otra que requiere una pequeñita, minúscula idea.

[1] La parte fácil es probar que $f(\overline{D(0,1)}) \subseteq \overline{D(0,1)}$. Es consecuencia directa del principio del módulo máximo.

[2] La segunda parte no la ha hecho bien nadie. Nadie cae en la cuenta de que la sugerencia que se da sirve para hacer un razonamiento de conexión. ¡Es difícil indicarlo más claramente!

3 Es increíble pero, a estas alturas, hay quien no entiende el concepto de adherencia.

La primera parte del ejercicio vale 3 puntos y la segunda 6 puntos.

Nota: los *disparates* reiterados quitan puntos.